Type de document	Cours	Classe	1re	Durée	2h	Date	19/09/2022
Thème et contenu(s)	Représentation des données – Langages & programmation – Architecture						
Capacités attendues	Savoir représenter un nombre entier < 255 en base 2, et inversement						
Prérequis	Connaître les puissances de 2, les additions des entiers, les divisions euclidiennes						
Description	Découverte du langage binaire et de la représentation des données						

I) Rappels de l'école primaire…

On compte très souvent en **base 10**, que l'on appelle **base décimale** (mais pas t oujours : nos heures et nos minutes sont décomptées dans une base différente).
L'idée est simple, et nous la comprenons avec l'exemple d'un compteur métrique, ou odomètre, comme on en trouve sur les anciennes voitures (cf. Paul MALVINO) :

Source : site marchand manutan.fr

Ce compteur se compose de plusieurs roues, chacune est divisée en 10 segments (faces) contenant les **10 premiers chiffres, dans l'ordre** : 0, 1,…,9.
Le compteur démarre à : 00000. Après avoir parcouru 1 mètre, il devient : 00001. Les distances successives sont : 00002, 00003, et ainsi de suite jusqu'à 00009. Quand on avance encore, la roue des mètres (celle à droite) revient à zéro, mais un petit dispositif mécanique force la roue à côté, celle des dizaines de mètres, à tourner d'un cran, on a donc : 00010.

Ce qui s'est passé mécaniquement s'explique mathématiquement : **la roue des unités s'est remise à zéro et a propagé une retenue**.

Toutes les roues fonctionnent de la sorte. Par exemple, à 999 kilomètres on a : 00999.
Que se passe-t-il au kilomètre suivant ? La roue des mètres se remet à zéro et propage une retenue vers la roue des dizaines. À son tour, celle-ci se remet à zéro et propage une retenue vers la roue des centaines, qui elle-même se remet à zéro et propage une retenue à la roue des milliers, qui, elle, avance de 1 : 01000. On a donc 1 kilomètre !

Quand une roue n'a plus aucun chiffre disponible, elle revient à sa position de départ (remise à zéro) et propage une retenue vers la roue voisine

Note : on note souvent les bases en indice. 10_2 se lit « un zéro en base deux », 10_{10} se lit « dix en base dix », ou plus simplement « dix ».

II) Le compteur binaire

Imaginez maintenant une roue inhabituelle, n'offrant que deux chiffres : 0 et 1. C'est une roue binaire…et c'est encore plus simple !
Nous disposons un odomètre muni de **8 roues binaires** : la première valeur est 00000000. On avance d'un mètre, on obtient : 00000001. On avance encore : que se passe-t-il ? La dernière roue **revient à zéro** (elle a épuisé toutes ses valeurs !) et **propage une retenue** : 00000010.

On peut établir une correspondance entre le nombre de mètres parcourus et l'état du compteur binaire :

Nombre de mètres parcourus	Valeur du compteur binaire
0	00000000
1	00000001
2	00000010
3	00000011
4	00000100
5	00000101
6	00000110
7	00000111
8	00001000

Les plus attentifs d'entre vous auront remarqué plusieurs choses :

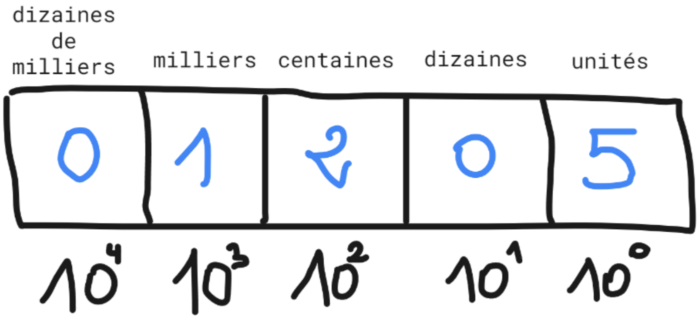
- Le compteur binaire pris comme exemple contient une série de **bits**
- Les bits sont au nombre de 8 : ils représentent un **octet**
- On peut, en utilisant cette configuration, compter jusqu'à 255 mètres (2^8 donc 256 possibilités, de 0 à 255)

Il est nécessaire de connaître par cœur les 8 premiers nombres binaires ci-contre.

Ainsi de suite…avec 255 = 11111111.

III) Une autre manière de raisonner

On peut aussi raisonner d'une autre manière, en partant encore une fois des nombres en base décimale et de notre odomètre à 5 chiffres :



$$1205 = 0 \times 10^4 + 1 \times 10^3 + 2 \times 10^2 + 0 \times 10^1 + 5 \times 10^0$$

Plusieurs remarques :

- Les zéros « à gauche » sont optionnels : 000024 = 24 et 01205 = 1205

- Plus on va à gauche plus les nombres sont « grands », plus on va à droite plus ils sont « petits »
- On peut décomposer un nombre en base 10 comme une somme de puissances de 10 possédant chacun un coefficient multiplicateur qui lui est propre. Les unités ont comme multiplicateur 5, les dizaines 0, …etc.
- **Cette décomposition est unique** : on ne peut pas écrire un nombre entier de deux manières différentes
- On appelle **bit de poids faible** la valeur la plus à **droite**, **bit de poids fort** la valeur la plus à **gauche**

On va appliquer le même raisonnement pour les **nombres binaires** : au lieu de travailler avec les puissances de 10, on travaille avec les **puissances de 2**

Sur le t-shirt, $10_2 = 1 * 2^1 + 0 * 2^0 = 2 + 0 = 2_{10}$

Il est très pratique de connaître par cœur les 8 premières puissances de 2.

Tout nombre binaire peut être écrit comme une somme de puissances de 2 successives ayant pour coefficient multiplicateur 0 ou 1

0	1	0	1
$2^3 = 8$	$2^2 = 4$	$2^1 = 2$	$2^0 = 1$

$$0 \times 2^3 + 1 \times 2^2 + 0 \times 2^1 + 1 \times 2^0$$
$$= 0 + 4 + 0 + 1 = 5$$

IV) Conversions

Maintenant qu'on a compris comment fonctionnait la base 2, on va pouvoir convertir des nombres d'une base vers l'autre.

Pour convertir un nombre **binaire** en nombre **en base 10**, il suffit d'additionner les valeurs des puissances de 2 correspondant à chacun de ses bits à 1

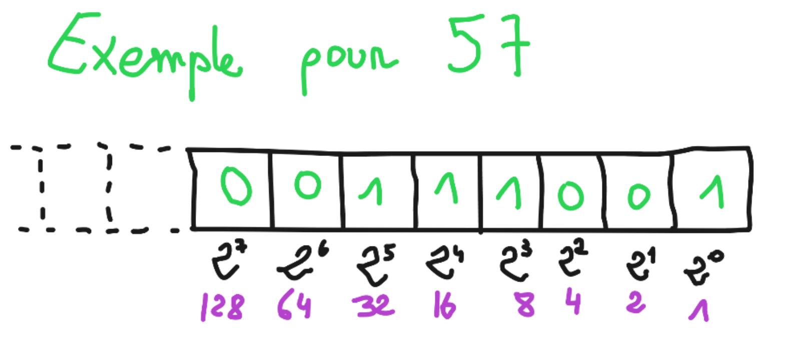
(nous venons de le faire pour 0101)

Pour convertir un **octet** complet en un entier en base 10, il faut prévoir d'aller jusqu'à 2^7, par exemple :

$11001110 = 1*2^7 + 1*2^6 + 1*2^3 + 1*2^2 + 1*2^1 = 128+64+8+4+2 = 206$

Pour convertir un nombre entier base 10 en un nombre en base 2, il existe deux méthodes que vous devez connaître

La première est « empirique » : on part du principe qu'on connaît toutes les puissances de 2 successives, et on cherche toutes les puissances de 2 que peut contenir ce nombre, en **partant de la plus grande possible**. Dit autrement, ce nombre binaire devra être une somme de puissances de 2, tout comme un nombre en base 10 est une somme de puissances de 10.



Par exemple, on veut convertir en binaire le nombre 57. 2^7 et 2^6 valent respectivement 128 et 64, ils sont > 57, on les élimine. $2^5 = 32$, on le garde. $2^4 = 16$, $32+16 = 48 < 57$, on le garde aussi. $2^3 = 8$, $48+8=56 < 57$, on le garde. $2^2 = 4$, $56+4 = 60 > 57$, on l'élimine. $2^1 = 2$, $56+2=58 > 57$, on l'élimine. Enfin, $2^0 = 1$ et $56+1 = 57$. On « tombe pile » sur le nombre cherché.

La seconde est de faire des divisions euclidiennes successives de ce nombre par 2, jusqu'à ce que le quotient devienne nul (= 0). On combine ensuite les restes (le « dernier reste » étant le bit de poids fort)